

弱奇性积分方程的保奇性 Petrov-Galerkin 方法*

张永东, 陈仲英

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 提出解弱奇性第二类积分方程的保奇性 Petrov-Galerkin 方法, 给出了数值解的误差估计, 证明其具有最佳收敛阶. 同时证明了保奇性迭代 Petrov-Galerkin 方法的超收敛性.

关键词: 弱奇性积分方程; 保奇性方法; Petrov-Galerkin 方法

中图分类号: O241.83 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0009-04

弱奇性 Fredholm 积分方程在数学物理研究中占有重要地位. 近 10 多年来已有一系列工作研究这类方程的数值解法. 现有的数值解法大多利用不带奇性的函数, 例如分片多项式或样条函数, 来逼近方程的解. 与此同时, 不少学者研究了方程的解的正则性. 对于某些核, 积分方程解的奇异展开已获得^[1,2]. 据此可知核的奇异性使得弱奇性 Fredholm 积分方程解的导数通常都具有奇性. 由此出现了一些针对解的奇异性构造特定剖分上的分片多项式作为逼近函数的算法. 然而, 所有这些工作都依赖于对分片多项式的节点的适当选取. 另一方面, 积分方程解的奇异性使得近似解收敛阶不高. 文 [3] 另辟蹊径, 提出了一种保奇性的 Galerkin 方法. 这种方法在试探函数空间引进某些带有奇性的函数, 有利于保持真解的奇性所反映的物理特性, 并且近似解具有最佳收敛阶.

本文将利用文 [3] 的保奇性思想, 提出保奇性 Petrov-Galerkin 方法并证明其具有最佳收敛阶; 提出保奇性迭代 Petrov-Galerkin 方法并证明其超收敛性. 最后给出了全离散保奇性数值方法和收敛性条件.

1 保奇性 Petrov-Galerkin 方法

设 X 是 Banach 空间, 其范数为 $\|\cdot\|$, X^* 是 X 的对偶空间, $K: X \rightarrow X$ 是紧线性算子. 考虑如下第 2 类 Fredholm 积分方程: 求 $x \in X$ 使得

$$x - Kx = f, \quad f \in X \quad (1)$$

为确保方程 (1) 的解唯一, 假定 K 的特征值不

为 1.

假设方程 (1) 的解具有奇性分解^[1,2], $x = w + u$, $w \in W$, $u \in U$, 其中 $W \subset X$ 是包含弱奇性函数的有限维子空间, 这个子空间的选择依赖于方程 (1) 的精确解的奇性分解; $U \subset X$ 是具有一定光滑性的函数所形成的子空间. w 称为解 x 的奇性部分, u 称为光滑部分.

设 U_n 是 U 的有限维线性子空间, S 和 V_n 都是 X^* 的子空间, $\dim(W) = \dim(S)$, $\dim(U_n) = \dim(V_n)$. 求解方程 (1) 的保奇性 Petrov-Galerkin 方法是: 求 $x_n \in X_n := W \oplus U_n$, 使得

$$\langle x_n - Kx_n, y_n \rangle = \langle f, y_n \rangle, \quad \forall y_n \in Y_n := S \oplus V_n \quad (2)$$

假设如下条件 (H) 成立:

对任意 $x \in X$, $y \in X^*$, 存在 $u_n \in U_n$, $y_n \in Y_n$, 使当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\|u_n - x\| \rightarrow 0, \quad \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

利用文 [4] 引入的广义最佳逼近和正则对的概念: 设 $x \in X$, 若存在 $x_n \in X_n$, 使

$$\langle x - x_n, y \rangle = 0, \quad \forall y \in Y_n \quad (3)$$

成立, 则称 x_n 为 X_n 到 x 的关于 Y_n 的广义最佳逼近. 若记 $P_n x = x_n$, 则线性算子 $P_n: X \rightarrow X_n$ 为广义最佳逼近算子. 如果存在线性算子 $\Pi_n: X_n \rightarrow Y_n$, 满足 $\Pi_n X_n = Y_n$ 以及:

$$\textcircled{1} \|x\| \leq C_1 \langle x, \Pi_n x \rangle, \quad \forall x \in X_n;$$

$$\textcircled{2} \|\Pi_n x\| \leq C_2 \|x\|, \quad \forall x \in X_n$$

其中, C_1, C_2 是不依赖于 n 的正常数, 则称 $\{X_n, Y_n\}$ 为子空间正则对.

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19571091); 广东省自然科学基金资助项目 (990227); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (00M8)

收稿日期: 2000-04-13; 作者简介: 张永东 (1962-), 男, 讲师.

在一维情形,若 X_n 和 Y_n 都为分片多项式空间,则 $\{X_n, Y_n\}$ 为正则对. 二维情况,若 X_n 为分片一次多项式空间和 Y_n 为分片 0 次多项式空间时为正则对(见文 [4, 5]). 文 [4] 指出,若 $Y_n \cap X_n^\perp = \{0\}$, 那么由 (3) 式定义的广义最佳逼近存在且唯一,并且广义最佳逼近算子 $P_n: X \rightarrow X_n$ 是投影算子,即 $P_n^2 = P_n$. 由于子空间 X_n 含有方程 (1) 的奇性部分,故由方程 (3) 所定义的广义最佳逼近称为保奇性广义最佳逼近.

命题 假设 $Y_n \cap X_n^\perp = \{0\}$, 那么,对任意 $x \in X$, 存在 $w \in W$, 使 $P_n(x - w) \in U_n$.

证明 由假设知 $P_n: X \rightarrow X_n$ 是投影算子. 对任意 $x \in X, P_n x \in X_n = W \oplus U_n$, 故存在 $w \in W, u_n \in U_n$, 使 $P_n x = w + u_n$. 因而 $P_n(x - w) = P_n x - w = u_n \in U_n$.

引理 1 假设条件 (H) 成立, 且 $Y_n \cap X_n^\perp = \{0\}$, 以及 $\{U_n, V_n\}$ 是正则对, 那么保奇性广义最佳逼近算子 $P_n: X \rightarrow X_n$ 满足

$$(1) \|P_n x - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \forall x \in X;$$

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 充分大时, } \|P_n\| \leq C;$$

$$(3) \|P_n x - x\| \leq C \inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\|, \forall x =$$

$$w + u \in X, w \in W, u \in U,$$

这里 C 是与 n 无关的正常数.

证明 首先证明 (1). 据命题 1, 对任意 $x \in X$, 存在 $w \in W$, 使 $P_n(x - w) \in U_n$, 故

$$\langle P_n(x - w) - (x - w), v_n \rangle =$$

$$\langle P_n x - x, v_n \rangle = 0, \forall v_n \in V_n$$

记 $\tilde{x} = x - w \in X$, 由条件 (H) 知, 存在 $u_n \in U_n$, 使 $\|u_n - \tilde{x}\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$, 从而有

$$\langle P_n \tilde{x} - u_n + u_n - \tilde{x}, v_n \rangle = 0, \forall v_n \in V_n$$

由于 $P_n \tilde{x} - u_n \in U_n$, 故可取 $v_n = \Pi_n(P_n \tilde{x} - u_n)$, 于是上式化为

$$\langle P_n \tilde{x} - u_n, \Pi_n(P_n \tilde{x} - u_n) \rangle =$$

$$\langle \tilde{x} - u_n, \Pi_n(P_n \tilde{x} - u_n) \rangle$$

利用 $\{U_n, V_n\}$ 的正则对性质和上式, 有

$$C_1 \|P_n \tilde{x} - u_n\|^2 \leq$$

$$\langle P_n \tilde{x} - u_n, \Pi_n(P_n \tilde{x} - u_n) \rangle \leq$$

$$C_2 \|\tilde{x} - u_n\| \|P_n \tilde{x} - u_n\|$$

$$\text{因而 } \|P_n \tilde{x} - u_n\| \leq C \|\tilde{x} - u_n\|$$

于是

$$\|P_n x - x\| = \|P_n \tilde{x} - \tilde{x}\| \leq$$

$$\|P_n \tilde{x} - u_n\| + \|\tilde{x} - u_n\| \leq$$

$$(1 + C) \|\tilde{x} - u_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

得证 (1). 对于 (2), 由结果 (1) 及一致有界原理直接得出. 现证 (3). 设 $G_n: X \rightarrow X_n$ 是最佳逼近算子, 即 $\|G_n x - x\| \leq \inf_{\phi \in X_n} \|\phi - x\|$.

对 $x = w + u$, 有

$$\begin{aligned} \|G_n x - x\| &\leq \inf_{\phi \in U_n} \|w + \phi - w - u\| = \\ &\inf_{\phi \in U_n} \|\phi - u\| \end{aligned}$$

因而

$$\|P_n x - x\| \leq$$

$$\|P_n x - G_n x\| + \|G_n x - x\| \leq$$

$$(1 + \|P_n\|) \inf_{\phi \in U_n} \|\phi - u\|$$

利用保奇性最佳逼近投影算子 P_n , 方程 (2) 可写为下面等价的算子形式:

$$x_n - P_n K x_n = P_n f \quad (4)$$

为方便起见, 将文 [6] 中的著名定理叙述如下:

定理 1^[6] 设 X 是一个 Banach 空间, $\{X_n\}$ 是 X 的有限维子空间序列, 若 $K: X \rightarrow X$ 是特征值不为 1 的紧线性算子, 线性投影算子 $P_n: X \rightarrow X_n$ 在 X 中点态收敛到恒等算子 I . 那么当 n 充分大时, 形如 (4) 的投影方程存在唯一解 $x_n \in X_n$ 使得

$$\|x - x_n\| \leq C \|x - P_n x\|$$

这里, x 是方程 (1) 的唯一解, $C > 0$ 是与 n 无关的常数.

应用引理 1 及定理 1 即得本节主要定理.

定理 2 假设引理 1 的条件成立, 那么当 n 充分大时, 方程 (2) 存在唯一解 $x_n \in X_n$, 使得

$$\|x - x_n\| \leq C \inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\|$$

这里, $x = w + u$ ($w \in W, u \in U$) 是方程 (1) 的唯一解, $C > 0$ 是与 n 无关的常数.

2 保奇性迭代 Petrov-Galerkin 方法

设 $x_n \in X_n$ 是方程 (4) 的唯一解, 定义

$$x_n' = f + K x_n \quad (5)$$

称 x_n' 为迭代投影逼近. 文 [7] 指出迭代投影逼近 x_n' 满足方程

$$x_n' - K P_n x_n' = f$$

文 [4] 讨论了 Petrov-Galerkin 方法的迭代解的超收敛性. 对于保奇性 Petrov-Galerkin 方法的迭代解也有类似结果.

引理 2 假设引理 1 的条件成立, 那么保奇性广义最佳逼近算子 P_n 的对偶算子 $P_n^*: X^* \rightarrow Y_n$ 点态收敛到 I^* .

证明 由条件 (H), 对任意 $y \in X^*$, 存在 $y_n \in Y_n$, 使 $\|y - y_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 另一方面,

$$\langle x, P_n^* y_n \rangle = \langle P_n x, y_n \rangle = \langle x, y_n \rangle, \forall x \in X$$

因而, $P_n^* y_n = y_n$. 于是

$$\|P_n^* y - y\| \leq \|P_n^* (y - y_n)\| + \|y_n - y\| \leq (\|P_n\| + 1) \|y_n - y\| \rightarrow 0$$

定理 3 假设 X 是自反的 Banach 空间并且引理 1 的条件成立, 那么当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\|KP_n - K\| \rightarrow 0$$

证明 用反证法. 假设 $\|KP_n - K\|$ 不收敛到 0, 那么存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和整数序列 $\{n_j\}, n_j \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$ 以及 $\{x_j\} \subset X, \|x_j\| \leq 1$, 使得

$$\|(KP_{n_j} - K)x_j\| \geq \varepsilon_0, j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

由 $\{x_j\}$ 的有界性及 X 的自反性知 $\{x_j\}$ 有弱收敛的子序列, 不妨仍记为 $\{x_j\}$, 使得对某 $x \in X$,

$$\langle x_j - x, y \rangle \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, \forall y \in X^*$$

由引理 2, 对任意 $y \in X^*, P_{n_j}^* y \rightarrow y (j \rightarrow \infty)$. 因此

$$\begin{aligned} \langle P_{n_j}(x_j - x), y \rangle &= \langle x_j - x, P_{n_j}^* y \rangle \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

也就是说, $P_{n_j}x_j - P_{n_j}x$ 弱收敛到 0. 又因为

$$P_{n_j}x_j - x_j =$$

$$(P_{n_j}x_j - P_{n_j}x) + (P_{n_j}x - x) + (x - x_j)$$

故 $P_{n_j}x_j - x_j$ 弱收敛到 0. 又因 K 是紧算子, $K(P_{n_j}x_j - x_j) \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$. 这与 (6) 矛盾.

利用定理 3 及文 [7] 中的定理 3.1 可得如下定理.

定理 4 假设 X 是自反的 Banach 空间并且引理 1 的条件成立, 那么当 n 充分大时, 迭代解 x_n' 满足

$$\|x - x_n'\| \leq C \|KP_n - K\| \inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\|$$

这里, $x = w + u (w \in W, u \in U)$ 是方程 (1) 的唯一解, $C > 0$ 是与 n 无关的常数.

设 $X = L^2(D)$, 其范数记为 $\|\cdot\|_2, D \subset \mathbf{R}^d (d \geq 1)$ 为有界闭集. 紧积分算子 K 定义如下:

$$(Kx)(s) = \int_D k(s, t)x(t)dt, s \in D \quad (7)$$

这里函数 $k(s, t): D \times D \rightarrow \mathbf{R}$. 假设由 (7) 式定义的 K 的特征值不等于 1, 且 $f \in L^2(D)$, 那么方程 (1) 在 $L^2(D)$ 上有唯一解, 并且由方程 (1) 定义的解有如下超收敛估计.

定理 5 假设算子 K 由 (7) 式定义, $x = w + u (w \in W, u \in U) \in L^2(D)$ 是方程 (1) 的解, x_n' 由 (5) 式定义并且引理 1 的条件成立, 那么当 n 充分大时, 迭代解 x_n' 满足

$$\begin{aligned} \|x - x_n'\|_2 &\leq \\ C \operatorname{ess\,sup}_{s \in D} \inf_{y_n \in Y_n} \|k(s, \cdot) - y_n\|_2 &\cdot \\ \inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\|_2 &\quad (8) \end{aligned}$$

这里, 常数 $C > 0$ 与 n 无关.

证明 由引理 1 之 (1), P_n 在 $L^2(D)$ 点态收敛. 利用定理 4, 有

$$\begin{aligned} \|x - x_n'\|_2 &\leq \\ C \|KP_n - K\|_2 \inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\|_2 &\quad (9) \end{aligned}$$

而对任意 $y_n \in Y_n$, 有 $K(\tilde{x} - P_n \tilde{x}) = \langle k(s, \cdot), \tilde{x} - P_n \tilde{x} \rangle = \langle k(s, \cdot) - y_n, \tilde{x} - P_n \tilde{x} \rangle$. 由引理 1 之 (3), 得

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{x} \in L^2(D), \|\tilde{x}\|_2=1} \|(KP_n - K)\tilde{x}\|_2 &\leq \\ C \operatorname{ess\,sup}_{s \in D} \inf_{y_n \in Y_n} \|k(s, \cdot) - y_n\|_2 &\cdot \\ \sup_{\tilde{x} \in L^2(D), \|\tilde{x}\|_2=1} \inf_{x_n \in X_n} \|\tilde{x} - x_n\|_2 &\leq \\ C \operatorname{ess\,sup}_{s \in D} \inf_{y_n \in Y_n} \|k(s, \cdot) - y_n\|_2 &\quad (10) \end{aligned}$$

利用上式及 (9) 便得估计式 (8).

3 全离散保奇性数值解法

设 X 是范数为 $\|\cdot\|$ 的 Banach 空间, H 是 X 的子空间. 假设 $K: X \rightarrow H$ 是紧线性算子. 考虑第 2 类积分方程

$$x - Kx = f \quad (10)$$

假设对任意 $f \in H$ (或 $f \in X$), 方程 (10) 在 H 中 (或在 X 中) 唯一可解, 并且此解可分解为 $x = w + u, w \in W, u \in U$, 这里 W 和 U 都是 X 的子空间, W 由奇性函数组成, U 由光滑函数组成, 且 W 是有限维的. 选择 X 的子空间序列 $X_n = W \oplus U_n$ 来逼近方程 (10) 的解; 其中 U_n 是 U 的有限维线性子空间. 假设

$$U \subset H \subset \tilde{X} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} \subset X$$

设 $K_n: X \rightarrow H$ 是算子 K 的逼近算子, $Q_n: X \rightarrow$

X_n 是恒等算子 I 的逼近算子. 那么解方程 (10) 的数值格式是: 求 $x_n \in X_n$, 满足

$$(I - Q_n K_n)x_n = Q_n f \quad (11)$$

这个逼近格式包括了一大类数值方法, 它不仅包括半离散 Galerkin 方法、Petrov-Galerkin 方法、配置法和保奇性方法还包括相应的全离散方法^[8].

现给出以下假设条件:

(1) 算子序列 $\{K_n: n = 1, 2, \dots\}$ 是集合紧的, 即如果 $B \subset X$ 有界, 那么 $\bigcup_n K_n(B)$ 相对紧.

(2) 序列 K_n 在 $\bar{X}$ 上点态收敛到 K , 即对每个 $x \in \bar{X}$, 有 $\|K_n x - Kx\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

(3) $\{Q_n: n = 1, 2, \dots\}$ 是一致有界, 即存在常数 $q > 0$, 对所有 n 成立 $\|Q_n\| \leq q$.

(4) Q_n 在 H 上点态收敛到 I , 即对任给 $x \in H$, 有 $\|Q_n x - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

定理 6 假设条件 (1) ~ (4) 成立. 若方程 (10) 的解 $x \in X$ 有分解: $x = w + u, w \in W, u \in U$, 那么存在正数 N 和 C , 使当 $n > N$ 时方程 (11) 有唯一解 $x_n \in X_n$ 满足

$$\|x - x_n\| \leq C \left(\inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\| + q \|Kx - K_n x\| \right) \quad (12)$$

证明 由文 [8] 的定理 5, 当 n 充分大时, 方程 (11) 唯一可解, 并且有如下估计式:

$$\|x - x_n\| \leq C (\|x - Q_n x\| + q \|Kx - K_n x\|) \quad (13)$$

这里, $x = w + u$ 且 $Q_n w = w$, 因而

$$x - Q_n x = u - Q_n u = u - \phi - Q_n(u - \phi), \\ \forall \phi \in U_n$$

因此

$$\|x - Q_n x\| \leq (1 + q) \inf_{\phi \in U_n} \|u - \phi\|$$

代上式到 (13) 式便得 (12) 式.

参考文献:

- [1] GRAHAM I. Singular expansions for the solution of second kind Fredholm integral equations with weakly singular convolution kernels[J]. J Integral Equations, 1982, 4: 1 - 30.
- [2] RICHTER G R. On weakly singular Fredholm integral equations with displacement kernels[J]. J Math Anal Appl, 1976, 55: 32 - 42.
- [3] CAO Y, XU Y. Singularity preserving Galerkin methods for weakly singular Fredholm integral equations[J]. J Integral Equations and Applications, 1994, 6(3): 303 - 333.
- [4] CHEN Z, XU Y. The Petrov-Galerkin and iterated Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 406 - 434.
- [5] CHEN Z, MICCHELLI C A, XU Y. The Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations II: Multi-wavelet scheme[J]. Advances in Computational Math, 1997, 7: 199 - 233.
- [6] ATKINSON K E. A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind [M]. Philadelphia: SIAM, 1976.
- [7] SLOAN I. Superconvergence[D]. GOLBERG M, ed. Numerical solution of integral equations[M]. New York: Plenum Pub, 1990. 35 - 70.
- [8] CHEN Z, XU Y, ZHAO J. The discrete Petrov-Galerkin methods for weakly singular integral equations[J]. J Integral Equations and Application, 1999, 11(1): 1 - 35.

Singularity Preserving Petrov-Galerkin Methods for Weakly Singular Integral Equations

ZHANG Yong-dong, CHEN Zhong-ying

(School of Mathematics and Computing Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Singularity preserving Petrov-Galerkin methods are developed for the second kind integral equations with weakly singular kernels. The numerical analysis is given, and the order of convergence achieves the optimal rate.

Keywords: weakly singular integral equation; singularity preserving method; Petrov-Galerkin method